¿Tenía razón Pitágoras?
Sobre gnomones y tetractys, música y física.

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Jesús Hernando Pérez Alcázar
Profesor Universidad Sergio Arboleda
GRUPO MUSA E.1

Resumen

Presentamos, de un lado, relaciones simples entre números naturales, usadas por Pitágoras para explicar la armonía de la música y la contraparte de Bach y D'Alambert y de otro lado, explicaciones con relaciones simples entre números naturales, a la manera pitagórica, para los más modernos problemas de la física.

Introducción

La primera explicación teórica del mundo surgió en Grecia; Tales de Mileto fue el primero en usar el argumento como herramienta para establecer la verdad de una afirmación.

Con Anaxímenes, su discípulo y Anaximandro, iniciaron la teoría[1] de los elementos: agua, tierra, aire y fuego, para explicar la conformación de la materia.

Pitágoras elaboró una teoría parecida a la de Anaxímenes, bajo la consigna: *El ser es número,* en el sentido de que *el número es la prueba de que el ser, y por lo tanto el alma existen; es la ventana para entender lo que verdaderamente es, para entender lo que no yace ni fluye; el número no nace, no crece, no se reproduce, no muere; no es materia ni tampoco una imagen mental. Todo lo material se descompone, cambia, se modifica e incluso desaparece. Lo que queda, después de desmenuzar una barra de tiza ya no es tiza, son partículas materiales que a su vez, si las disolvemos en agua, pueden desaparecer.*

El devenir, la evolución, es decir el ser re-encarnándose, muestra numéricamente el verdadero fluir, el que va en la buena dirección, el que nos conduce a la armonía. La armonía

[1]La palabra *teoría*, utilizada por primera vez por los pitagóricos, ha adquirido significados diferentes según la teoría que la utilice. Dentro de la teoría pitagórica, teoría y filosofía son conceptos análogos; es decir, teórico es el amante de la sabiduría, es aquel que se interesa en el método, para alcanzar la perfección; el que entiende el *método, lo asimila y lo practica, es entonces el que verdaderamente ama la filosofía es, por lo tanto, un filósofo, un matemático, un teórico y no un simple ciudadano.*

es número o relaciones numéricas, hay que perseguir al número, a sus propiedades, a sus relaciones; por eso la música es, la armonía musical se muestra numéricamente.

El verdadero ser se muestra numéricamente, porque es uno como tal y a la vez dos cuando deviene y se encajona apareciendo siempre como cuerpo y espíritu; de donde se desprende, además, la doble dirección del movimiento. El uno aparece siempre como dos; hay pues oposiciones. Las oposiciones, según el pitagorismo, deben ser diez: no es posible que existan más o menos. Hay solo cuatro maneras de tomar forma espacial: punto (uno), línea (dos), superficie (tres) y espacio (cuatro); esta es la primera "cuaterna"pitagórica[2]:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

El diez representa entonces las cuatro formas de estar en el espacio y así el diez es el espacio. El cuatro, la tetractys o cuaterna básica, es fundamental: un tetraedro tiene cuatro vértices, cuatro lados congruentes y cuatro ángulos también congruentes, tiene dos propiedades especiales: es el poliedro más pequeño y tiene el mismo numero de vértices y de caras. Ambas propiedades siguen del hecho que el número de vértices es uno más que la dimensionalidad del espacio. El alma está relacionada con el fuego y el fuego es un tetraedro.

El cosmos es armonioso puesto que es la totalidad del ser y por lo tanto, debe mostrarse como cuatro y como diez: la bóveda celeste, el fuego, primordial, los siete planetas (conocidos en la época) y la anti-tierra (lugar en el cual habitan los hombres armoniosos). Este último, claramente y como debe pasar con cualquier buena teoría, es hipotético, postulado para completar el diez[3].

Para los pitagóricos *el número es todo*, con base en él y en sus mutuas relaciones se puede explicar el mundo, y cuando se referían a *número* lo hacían con respecto a los*números naturales*, con ellos elaboraron una explicación que incluyo la música y la astronomía de su tiempo.

1. La Música

La música está formada por un conjunto de sonidos seleccionados con algún criterio que los califica como agradables, estos criterios son relativos a cada cultura y por lo tanto no son universales.

La cultura griega eligió algunos sonidos, llamados **notas**, a los que le corresponden determinadas frecuencias[4], y junto con ellas, consideraron que, las notas correspondientes a los

[2]PEREZ, J., No, no, te amo.,Grupo editorial Criterio, 2003. p.88.

[3]PEREZ, J., Ibid, p. 91.

[4]Realmente cuando vibra una cuerda no emite una sola frecuencia, sino ella y un conjunto de sus armónicos, dependiendo del instrumento, algunos de ellos sobresalen, esto es lo que determina el timbre

múltiplos de esas frecuencias, llamados **armónicos**, también sonaban de manera agradable si se tocaban simultáneamente (armonía) o secuencialmente (melodía).

Uno de los primeros descubrimientos pitagóricos fue la relación entre las notas emitidas por una cuerda y la longitud de ella; descubrieron, que si una cuerda de longitud L, emite una nota de frecuencia f (llamada la **tónica**), cuando su longitud se reduzca a la mitad emitirá una nota, armónica con ella, de frecuencia doble de la anterior; es decir $2f$, esta nota es el **primer armónico** de la tónica (suena de la misma forma pero su frecuencia es más alta)

Dividieron el intervalo, entre una nota y su segundo armónico, en siete partes, y a $2f$ la llamaron *la octava*, de esta manera entre cada nota y su primer armónico se colocaron otras 7 notas.

Si la longitud de la cuerda se reduce a $\frac{2}{3}$ L, la nota que emite es la *quinta* en la división hecha, si la longitud de la cuerda se reduce a $\frac{3}{4}$ L, la nota que emite es la *cuarta*.

Esto significa que la armonía musical es expresable como razones de números naturales, *¡la armonía es número!*

La longitud de la cuerda determina la longitud de la onda del sonido que emite la cuerda, y cuando la longitud de la cuerda disminuye, la frecuencia del sonido emitido aumenta en la misma proporción; por lo tanto, si la longitud de la cuerda se reduce a la mitad su frecuencia será el doble (lo que corresponde a la octava) y si la longitud de la cuerda se reduce a $\frac{2}{3}$ de la original su frecuencia, aumentará a $\frac{3}{2}$ de la frecuencia original.

Además existen relaciones aritméticas entre las notas definidas, por ejemplo: *La cuarta* nota es *media proporcional* entre la *tónica* y la *octava*, pues la relación entre las longitudes de la cuerda es:

$$\frac{3}{4}L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{2}L\right)$$

La *quinta* es media armónica entre la *tónica* y la *octava*, ya que la relación entre las longitudes de la cuerda es:

$$\frac{3}{2L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{L} + \frac{2}{L}\right)$$

De otro lado, existen proporciones entre ellas, la *quinta* es a la *tónica* como la *octava* es a la *cuarta*, y de esta se desprende que la *cuarta* es a la *tónica* como la *octava* es a la *quinta*, etc.

Los nombres latinos para las notas musicales, en la cultura occidental, son las primeras sílabas de un himno a Juan el Bautista:

Ut queant laxis
Resonare fibris
Mira gestorum

del instrumento.

Famuli tourum
Solve polluti
Labil reatum
Sancti Johannes

Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La, SJ

Propuesta hecha por un monje de nombre Gui de la Abadía de Pomposa (Italia) en el siglo $XVII$. Posteriormente se cambiaron la primera y la última por Do y Si, respectivamente, para facilitar su canto.

En países como Alemania e Inglaterra se nombran las notas con las letras del abecedario iniciando en La, a la que se le asigna la letra A, a Si se le asigna B, a Do se le asigna C, y así sucesivamente:

Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si
C, D, E, F, G, A, B.

Para expresar la gran variedad de notas que son audibles por los humanos, cada escala se marca con un subíndice, por ejemplo: Do_2 cuya frecuencia es doble de la de Do_1, Do_3, cuya frecuencia es el doble de la de Do_2, y así sucesivamente; de esta forma aparecen Sol_4, Fa_{-2}, etc[5].

La nota que se ha escogido como base, en la mayoría de los países occidentales, es La_3, a la que le asigna una frecuencia de 435 Hertz en unos países y 440 Hertz en otros.

Los sonidos audibles por los humanos, entre 20 y 20000 Hertz, pueden acomodarse[6] entre La_{-2} con 27.5 Hertz y Mi_9 correspondiente a 21.120 Hertz. Sin embargo la música, es decir los sonidos agradables abarcan un rango menor, un piano normal tiene un registro entre La_{-2} y Do_7 con una frecuencia de 4 186 Hertz.

Para ejecutar varios instrumentos al mismo tiempo o entonar una melodía desde una nota diferente, es necesario también escoger unas relaciones de frecuencias entre cada nota y la siguiente; una propuesta del músico italiano Zarlino a comienzos del siglo XVI, basado en las reglas pitagóricas asignó los siguientes intervalos:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\text{Do} & & \text{Re} & & \text{Mi} & & \text{Fa} & & \text{Sol} & & \text{La} & & \text{Si} & & \text{Do} \\
& \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \frac{16}{15} & & \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \frac{9}{8} & & \frac{16}{15} &
\end{array}$$

Esto significa que la frecuencia correspondiente a la nota Re es $\frac{9}{8}$ de la frecuencia correspondiente a la nota Do; la frecuencia correspondiente a la nota Mi es $\frac{10}{9}$ de la frecuencia correspondiente a la nota Re; y así sucesivamente.

[5]Los músicos no usan 0 como subíndice.

[6]En la escala de Zarlino. En la escala temperada, que mencionamos un poco más adelante, estos valores son ligeramente diferentes.

Notamos que hay tres tipos de intervalos, llamados respectivamente: Tono mayor $\frac{9}{8}$, tono menor $\frac{10}{9}$ y semitono $\frac{16}{15}$.
De esta manera, podemos expresar las relaciones entre las frecuencias de las notas en una escala, por ejemplo:
$\mathrm{Re}_1 = \frac{9}{8}\,\mathrm{Do}_1$
$\mathrm{Mi}_1 = \frac{10}{9}\,\mathrm{Re}_1 = \frac{10}{9}\frac{9}{8}\,\mathrm{Do}_1 = \frac{5}{4}\,\mathrm{Do}_1$
$\mathrm{Fa}_1 = \frac{16}{15}\,\mathrm{Mi}_1 = \frac{16}{15}\frac{5}{4}\,\mathrm{Do}_1 = \frac{4}{3}\,\mathrm{Do}_1$
$\mathrm{Sol}_1 = \frac{9}{8}\,\mathrm{Fa}_1 = \frac{3}{2}\,\mathrm{Do}_1$
$\mathrm{La}_1 = \frac{10}{9}\,\mathrm{Sol}_1 = \frac{5}{3}\,\mathrm{Do}_1$
$\mathrm{Si}_1 = \frac{9}{8}\,\mathrm{La}_1 = \frac{15}{8}\,\mathrm{Do}_1$
$\mathrm{Do}_2 = \frac{16}{15}\,\mathrm{Si}_1 = 2\,\mathrm{Do}_1$
En esta distribución de intervalos (escala), los armónicos de una nota pertenecen generalmente a la misma escala, con lo que se logra que dos notas sucesivas (melodía) sean armónicas una de la otra, y esto es agradable al oído. Por ejemplo:
Si
$f = \mathrm{Do}_2$
entonces
$2f = \mathrm{Do}_3$
$3f = \mathrm{Sol}_3$
$4f = \mathrm{Do}_4$
$5f = \mathrm{Mi}_4$
$6f = \mathrm{Sol}_4$
En los intervalos mayores y menores es posible intercalar notas bajando o subiendo un semitono con respecto a ellos, los que son llamados *bemol* ($\flat$) y sostenido ($\sharp$) respectivamente. Subir un semitono a una nota significa hacer $\frac{16}{15}$ de ella, por ejemplo:

$$Do^{\sharp} = \frac{16}{15} Do$$

Bajar un semitono de una nota significa hacer $\frac{15}{16}$ de ella, por ejemplo:

$$Re_{\flat} = \frac{15}{16} Re$$

Como podemos observar entre Do y Re hay otras dos notas, lo mismo sucede entre Re y Mi, entre Fa y Sol, entre Sol y La, y entre La y Si, para un total de 17 notas en una escala, **todas entrelazadas en hermosas y simples relaciones de números naturales**.
Sin embargo, esta escala tiene problemas cuando deseamos cambiar la tónica, para repetir una melodía a partir de una nueva nota, lo que dificulta la ejecución de instrumentos que emiten notas fijas como el piano, o el órgano, o cuando pretendemos ejecutar varios instrumentos a la vez.

Este problema dio origen a una nueva escala conocida como la escala temperada elaborada por el músico alemán Johann Sebastian Bach y los matemáticos y físicos Franceses, D´Alambert y Rameau, en ella, la octava se divide en 12 intervalos iguales, llamados *semitonos temperados*, identificando el sostenido de una nota con el bemol de la siguiente y manteniendo la relación armónica

$$Do_2 = 2Do_1$$

Lo que obliga a:

$$\frac{Do^\sharp}{Do_1} = \frac{Re}{Do^\sharp} = \frac{Re^\sharp}{Re} = \frac{Mi}{Re^\sharp} = \frac{Fa}{Mi} == \frac{Fa^\sharp}{Fa} = \frac{Sol}{Fa^\sharp} = \frac{Sol^\sharp}{Sol} = \frac{La}{Sol^\sharp} = \frac{La^\sharp}{La} = \frac{Si}{La^\sharp} = \frac{Do_2}{Si}$$

Si llamamos t a la razón común, y multiplicamos todas las razones anteriores, debe cumplirse que el semitono temperado corresponde a

$$t^{12} = \frac{Do_2}{Do_1} = 2$$

de donde

$$t = \sqrt[12]{2}$$

que **no es un número natural**, ni es la razón de dos números naturales, sino que es un número irracional y ni siquiera es un irracional cuadrático, como $\sqrt{2}$; ni siquiera es un número construible con regla y compás, y a pesar de todo es el que gobierna las relaciones entre las notas de la mayor parte de la música contemporánea. Como vemos, finalmente en este caso, Pitágoras **no** tenía razón.

2. La Física

Los pitagóricos pretendieron extender la armonía que encontraron en la música a otros ámbitos, en particular relacionaron los intervalos entre los siete planetas conocidos de su época: la Luna, el Sol, Venus, Mercurio, Marte, Júpiter y Saturno, con los siete intervalos musicales, lo que, según ellos explica la armonía celeste y demuestra que los cielos y la tierra son esencialmente número.

La Física actual pretende, al igual que Pitágoras, ofrecer una explicación del mundo con una consigna similar, *todo es matemáticas*, donde el concepto de número tiene un papel prioritario; pero este concepto de número es mucho más amplio; incluye números reales, complejos[7], cuaterniones[8], vectores, matrices[9], formas diferenciales[10], tensores[11], twistores[12]

[7]CHURCHIL., Complex variables and applications, McGraw Hill, 1960.

[8]RASTALL, P., Quaternions in relativity, Modern Phys. 1964, 820.

[9]MALTSEV, A., Fundamentos De Algebra Lineal, Mir, 1976.

[10]SPIVAK, J., Cálculo en variedades, Reverté, 1970

[11]LICHNEROWICZ, A., Elementos de cálculo tensorial, Aguilar, 1972.

[12]PENROSE, R., Twistor Theory its aims and achievements en Quantum Theory and Beyond, Cambridge

y otras generalizaciones.

Nuestro propósito ahora es mostrar que en la física moderna, el *número natural* ocupa un lugar muy importante en sus explicaciones y en este caso Pitágoras estaba más cerca de la razón.

2.1. Galileo y Kepler

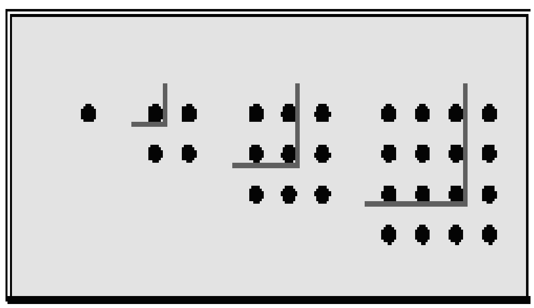
Galileo Galilei en 1590, encontró, con herramientas muy rudimentarias[13], que un cuerpo cae durante intervalos sucesivos de tiempo una distancia proporcional a los números:

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

lo que significa que la distancia total de la caída, resulta proporcional al cuadrado del tiempo, puesto que:

$$1 + 3 + 5 + 7 \cdots + (2n - 1) = n^2$$

y si miramos con ojos pitagóricos, estos son *gnomones*



Kepler creyó, como Pitágoras, en la armonía de las esferas; con las variaciones propias de su época; la teoría heliocéntrica del sistema solar estaba en boga, habían sido descubiertos *seis* planetas: Tierra, Venus, Mercurio, Marte, Júpiter, Saturno y él estableció su comparación con los *cinco* sólidos platonicos; buscó por muchos años, leyes numéricas que permitieran encajar las seis órbitas planetarias en las seis esferas que determinan los cinco sólidos cuando se circunscriben unos sobre los otros; aproximó, se ilusionó, quiso obligarlos, pero finalmente cedió a la evidencia de los datos astronómicos tomados por Tycho Brahe, y declinó su hermosa teoría; por una más vulgar, donde aparecían las imperfectas elipses en lugar de las perfectas circunferencias del ideal griego.

Sin embargo, en 1619 descubrió que los cuadrados de las distancias medias al sol estaban en relación directa con los periodos de rotación de ellos alrededor del sol.

$$T^2 = \alpha r^3$$

Press, 1972, cap VI.

[13]En su tiempo no existían relojes, ni un sistema de números más allá de los números decimales.

Y con ello, abrió las puertas para el desarrollo de la astronomía moderna.

2.2. La mecánica y la electrodinámica clásicas

A mediados del siglo XVII, Isaac Newton publica *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* donde aparece, lo que en notación moderna escribimos como:

$$F(x, v, t) = \frac{dp}{dt}$$

conocida como la Ley de movimiento de Newton y de la cual puede deducirse casi todo lo que tenga que ver con movimientos a velocidades relativamente pequeñas con respecto a la velocidad de la luz.

La ecuación de movimiento es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la cantidad de movimiento p y de segundo orden en la posición x, cuyas variables independientes y dependientes toman valores continuos.

Con mirada pitagórica, Robert Hooke hizo notar, antes que Newton publicara su ley de gravitación universal, que los exponentes *naturales* en la ley de la caída de los cuerpos de Galileo y los de la ley de Kepler implican que la aceleración de un cuerpo alrededor del sol debe ser inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al sol; es decir:

$$a_{sol} = \alpha \frac{1}{r^2}$$

En 1687 Newton precisó que dicha aceleración es:

$$a = \frac{-GM}{r^2}$$

En 1875, Charles Coulomb descubrió, de manera experimental, que las fuerzas electrostáticas se comportaban de la misma forma:

$$F_e = \frac{kQq}{r^2}$$

En 1773, Henry Cavendish había obtenido la misma ley y cien años después Maxwell repitió el experimento, estableciendo que el exponente de r es -2 con un error de

$$\pm \frac{1}{21600}$$

Pero el punto no es, si está muy cerca de -2, sino, si debe ser *exactamente* -2; desde el punto de vista matemático, la única ley de fuerza que produce este resultado es una, cuya divergencia sea cero, es decir, una fuerza donde la partícula cae radialmente de manera que se compense la variación del área de una cáscara esférica con el mismo radio; o sea, con el cuadrado del radio.

Adicionalmente, debemos notar que el área de una superficie esférica de radio r depende del cuadrado del radio porque el espacio donde está inmersa es de *tres* dimensiones.

De la ley de Coulomb, la ley de electromagnetismo de André Marie Ampére (1822), también proporcional al inverso del cuadrado de la distancia y de otros resultados experimentales, James Clerck Maxwell formuló cuatro ecuaciones diferenciales parciales para la electrodinámica, que establecen:

1. No se pueden separar los dos polos de un imán[14]: matemáticamente diríamos que el flujo magnético es siempre cero y como la idea de flujo lo expresa la divergencia, tenemos que:
$$\nabla \cdot B = 0$$
2. Las cargas eléctricas producen campos eléctricos proporcionales a ellas[15].
$$\nabla \cdot E = \rho$$
donde ρ es la densidad volumétrica de carga.
3. Toda variación de campo magnético B genera un campo eléctrico E cuya relación con él está dada por:
$$\nabla \times E = \frac{\partial B}{\partial t}$$
4. Las corrientes eléctricas y las variaciones de campos eléctricos producen campos magnéticos y su relación con ellos es:
$$\nabla \times B = \frac{\partial E}{\partial t} + J$$
donde el vector J es la densidad de corriente.

Sin embargo, si nos empeñamos en ver como Pitágoras, podemos insistir en que el *orden* de las ecuaciones y el *número de variables* son números naturales, y son cuatro: la tetractys del electromagnetismo.

En 1865 el mismo Maxwell formuló las ecuaciones para las ondas electromagnéticas

$$\nabla^2 E - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

[14]Hoy se discute la posibilidad de que existan estos monopolos, pero aún no hay evidencia experimental

[15]Usamos el sistema de unidades de Heaviside - Lorentz con c = 1.

cuyas variables dependientes (campos eléctricos y magnéticos) e independientes (espacio y tiempo) nuevamente son continuas, *pero* el número de variables independientes es 4, y de dependientes 6; un pitagórico vería aquí, una cuaterna y el tercer número triangular.

$$\mathbf{4 = 1 + 3} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{6 = 1 + 2 + 3}$$

Posteriormente Euler, D´Alembert, Fourier y Cauchy; hicieron refinamientos que dieron a la física clásica una forma muy elegante e hicieron pensar definitivamente que el énfasis debía ponerse en variables continuas.

2.3. La teoría atómica

El teorema de Pitágoras establece que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene un área equivalente a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos. Pitágoras pensó[16] que esta era una relación entre números enteros para *todos* los triángulos rectángulos; esto significa que debería existir una longitud común para medir todas las longitudes, en particular las de la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo; esto es, *un átomo de longitud.*

2.3.1. La materia es atómica

Demócrito en la antigua Grecia había propuesto lo mismo para la materia, pero hubo de esperar, hasta cuando Proust en 1799 propuso la ley de proporciones definidas: *cada compuesto químico posee una composición definida y constante*, lo que implica que una combinación química no depende del proceso de obtención de la misma; y que Dalton en 1808 formulara la ley de proporciones múltiples: *si dos elementos se combinan para formar más de un compuesto, los pesos de uno de ellos, que se combinan con un peso fijo del otro, están relacionados entre si como números enteros sencillos*[17], para que la *teoría atómica de la materia*, tomara forma; y desde la química los números naturales empezaran a protagonizar muchas de las explicaciones que le eran esquivas, a la teoría de las variables continuas.

La teoría de la afinidad química, expresada en términos de la valencia de los elementos, la ley de Lisle de los ángulos constantes de 1722 y la ley de Hauy de índices racionales de 1784 para cristales, implican que un cristal está formado por un número entero de capas de átomos, y el énfasis en los números enteros fue haciéndose cada vez más evidente.

La teoría atómica de la materia, siguió teniendo éxitos de la mano de Ludwig Boltzmann, al explicar la razón de los calores específicos del aire y del Helio y la ley de Dulong Petit para los calores específicos de los sólidos[18], un asunto que le fue esquivo a la termodinámica.

[16]SHANKS, D., Solved and unsolved problems in Number theory, Chelsea, 1985, p. 24.
[17]Pitágoras no lo hubiera dicho mejor.
[18]NEKRASOV, B, V., Química General, Mir, 1988, p.p. 26-27.

Con el estudio del átomo de materia, surge un giro en el estudio de la electricidad, inicialmente descrita en términos de variables continuas, con las ecuaciones de Maxwell, hacia una explicación también atómica.

2.3.2. La electricidad es atómica

En 1834 Michael Faraday descubre que *si se hace pasar una misma cantidad de electricidad a través de soluciones diferentes, los pesos de las sustancias descompuestas o depositadas en los distintos electrodos son proporcionales a los pesos equivalentes de dichas sustancias*; como el peso químico es atómico, entonces **la electricidad también es atómica**; los átomos de electricidad fueron llamados *electrones* por Stoney en 1891. Y no solo la materia y la electricidad,

2.3.3. La energía es atómica

La idea de que la energía radiada por un cuerpo también está *cuantizada*; es decir, que sólo existe en múltiplos enteros de un *quantum* básico, comenzó a surgir ante el fracaso de la física clásica para explicar el espectro de frecuencias emitido por un cuerpo negro.
En 1879, Stefan obtiene una ecuación empírica para la energía radiada, por unidad de tiempo y de superficie, proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta

$$E = \alpha T^4$$

Esta ecuación fue obtenida de las ecuaciones de Maxwell y las de la termodinámica por Ludwig Boltzman en 1884. Aunque el electromagnetismo y la termodinámica son ambas teorías de variables continuas, subrayamos que el exponente en la ley de Stefan es 4, y curiosamente esto se debe, como se observa en la derivación de Boltzmann, a que ella es igual al número de variables independientes en la ecuación de la onda, tres de espacio y uno de tiempo.
De nuevo una tetractys:

$$4 = 3 + 1$$

De la ley de Stefan, Wien en 1893 derivó una función general para la distribución espectral de la radiación del cuerpo negro, conocida como ley de Wien, que establece:

$$\rho_T(\lambda) = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5}$$

donde f es una función que depende del producto de λ y T.
Uno de los intentos para determinar la función f fue hecho por Rayleigh y Jeans, quienes utilizando la teoría electromagnética y la distribución de probabilidades de Boltzmann; llegaron a que

$$f(\lambda T) = 8\pi k\lambda T.$$

Pero desafortunadamente esta fórmula no está de acuerdo con los experimentos, aunque es una consecuencia necesaria de la física clásica.

2.3.4. La energía es atómica

Para resolver este problema, Max Planck en 1900 propuso asumir que la energía no era radiada continuamente sino discretamente, es decir que **la energía radiada también es atómica**, para una frecuencia dada:

$$E = hv$$

donde E es la energía del quantum, v es la frecuencia, y h es una constante, conocida ahora como constante de Planck.

Con esta suposición dedujo la función:

$$f(\lambda T) = \frac{8\pi hc}{\mathrm{e}^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$

que concuerda perfectamente con los experimentos[19].
Pruebas adicionales sobre la existencia de los quanta de Planck, llegaron de fuentes aparentemente dispares:

El efecto fotoelctrico y el efecto Compton Cuando se hace incidir luz ultravioleta sobre algunos materiales, estos producen corrientes eléctricas, a este fenómeno se le conoce como *efecto fotoeléctrico*, la teoría clásica no permite una adecuada explicación de este fenómeno, pero Albert Einstein en 1905 logró hacerlo, aceptando de manera heurística los *quanta* de energía de Planck.
En 1923 Arthur Compton, logró explicar, utilizando la hipótesis de Planck, como un haz de rayos X es dispersado por una lámina metálica con una componente de radiación de longitud de onda mayor que la incidente, el fenómeno es conocido ahora como *efecto Compton*.

Los espectros atómicos Si se hace pasar un haz de luz por un tubo que contenga hidrógeno, o cualquier otro elemento y esta luz se dispersa utilizando un prisma, ella produce un patrón de líneas, que llamamos el *espectro* del elemento; es única y particular e identifica al elemento como una huella dactilar; la separación de las líneas en el espectro,

[19] EISBERG, R., Fundamentos de Física Moderna, Alambra, 1973, p.p. 51-77.

correspondientes a cada longitud de onda, el caso del hidrogeno, habían sido determinadas aproximadamente, en 1855 por Balmer, quien encontró la fórmula:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{2^2}\right)$$

donde m es un *número entero* mayor o igual a 3.
Esta fórmula fue generalizada por Rydberg y Ritz en 1908 para un elemento cualquiera

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{(m+a)^2} - \frac{1}{(n+b)^2}\right)$$

donde a, b y R son constantes y $n > m$ son números enteros.
Haciendo uso de la fórmula de Planck, el físico danés Niels Böhr en 1913, dedujo la fórmula de Balmer, asumiendo que un electrón tiene órbitas estables si **su momento angular es múltiplo entero de una cantidad fija**:

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

donde n es el número cuántico principal.

La tabla periódica En 1869 Mendeléiev sistematizó y generalizó los datos existentes sobre las propiedades de los elementos químicos, en la llamada *tabla periódica*; en ella organizó los elementos en orden de sus pesos atómicos, descubriendo la periodicidad en el cambio de las propiedades químicas; es decir que, para cada elemento, después de un número de elementos, existe otro parecido a él.
Sin embargo, no todos los elementos quedaron en el sitio correcto, en particular las llamadas *tierras raras* y algunos elementos radioactivos.
En realidad, la tabla no es estrictamente periódica, sino que aparecen periodos de 2, 8, 18, 32, y en general de la forma $2n^2$, para este fenómeno no había razón conocida.
En 1911 C. G. Barkla encontró, por dispersión de rayos X, que un átomo contiene un número de electrones aproximadamente igual a un medio de su peso atómico
En el mismo año E, Rutherford, encontró por dispersión de partículas de rayos alfa, que la carga positiva y con ella, la mayoría de la masa del átomo, estaba concentrada en el centro del átomo. La carga positiva también estaba cerca de un medio del peso atómico.
En 1913, Soddy, Fajans, Van den Broek y Moseley descubrieron que no es el peso atómico sino el número atómico el que determina la posición en la tabla. La explicación sobre los períodos anómalos hubo de esperar hasta 1925 cuando fue descubierto el *spin* del electrón; asunto que mencionaremos un poco más adelante.
Erwin Schrödinger en 1926, propone una ecuación con 3 números cuánticos: el número cuántico principal de Böhr n, y otros dos números l, m; que corresponden a los armónicos

esféricos de las funciones de onda cuando la ecuación se escribe en coordenadas esféricas. **Tres números como las 3 dimensiones del espacio**.
Los números l y m están restringidos por los valores de n, de forma que:

$$l = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$$

y

$$m = l, l+1, \cdots, l-1, l$$

Por ejemplo, para $n = 4$ hay 16 estados posibles

	3	2	1	0
	2	1	0	-1
	1	0	-1	-2
	0	-1	-2	-3
$l =$	**0**	**1**	**2**	**3**

y si queremos ver **gnomones**, de nuevo, helos ahí!
La ecuación de Schödinger es una ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = \imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

donde $\hbar$ es una constante, vinculada a la constante de Planck, del orden 10^{-31}, m es la masa de la partícula y V es el potencial bajo el cual se mueve la partícula.
Esta juega el mismo papel que la ley de Newton, ahora para partículas muy pequeñas - de orden atómico- y velocidades no muy grandes comparadas con la de la luz. Aquí, sin embargo, hay una diferencia fundamental, la aparición del número imaginario $\imath = \sqrt{-1}$, el cual no tiene interpretación física directa, lo que implica un problema en la interpretación de la función $\psi(x, y, z, t)$ que aparece en la ecuación y que tiene en general valores complejos. En 1926 Max Born[20] propuso una interpretación estadística: $|\psi|^2$ (el producto de ψ con su complejo conjugado, que sí es un número real) como la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula en la posición (x, y, z) en el tiempo t; con esto se perdió el sentido hablar de posición y velocidades de la partícula en un mismo instante y lugar; podemos calcular probabilidades, posiciones o velocidades promedios pero ya no tenemos como ayuda la intuición, y el camino a la comprensión se vuelve estrictamente matemático.
En 1925 Uhlenbeck y Goudsmit descubrieron un nuevo número cuántico, el *spin*, con lo que completamos **de nuevo 4**, este número sólo asume dos valores, lo que nos da en total $2n^2$ estados posibles, y surge de manera natural una explicación para los periodos de la tabla periódica.

[20]JAMMER, M. Conceptual Developments of Quantum Mechanics, Wiley,(1974).

3. Las teorías gauge o de calibración

Con la interpretación dada para la función de onda ψ aparece una simetría con respecto a la fase; como sabemos que todo número complejo se puede escribir en forma polar:

$$\psi = |\psi| \mathrm{e}^{\imath\theta}$$

su conjugado tiene igual expresión cambiando $\imath$ por $-\imath$ y al multiplicarlos, el factor fase ($\imath^{\theta}$) se cancela, es decir, que la cantidad $|\psi|^2$ que es la que tiene sentido físico, no depende de la fase θ -ésta puede escogerse arbitrariamente sin afectar los resultados de los experimentos-; esta simetría, estudiada inicialmente por Weyl, en un intento por unificar la gravitación con el electromagnetismo, fue llamada Eichinvarianz (invarianza de escala), pero posteriormente fue identificada con la invarianza gauge electromagnética, solo que aquí tiene una forma matemática más simple; dado que se trata de un grupo, notado por brevedad

$$U(1) = \{z \mid z = \mathrm{e}^{\imath\theta}, \theta \in R\}$$

que actúa sobre un espacio de funciones $\psi(x, y, z, t)$, dejando la norma de esta invariante.

Esta versión tiene la ventaja de recordarnos la geometría, un grupo que actúa sobre un espacio y deja su métrica invariante, sugiere de inmediato hacer geometría de la mecánica cuántica o hacer mecánica cuántica para las diversas versiones de la geometría, ambas cosas ya están avanzadas[21].

En 1954, Yang y Mills propusieron una mecánica cuántica para el grupo $SU(2)$ (matrices 2×2 con entradas complejas y unitarias) al intentar explicar la simetría entre protones y neutrones (pues, salvo la carga eléctrica, éstos se comportan idénticamente), buscando en particular una teoría para las interacciones fuertes.

Pero fueron necesarios 9 años más para que Glashow, Gellman, Zweig y otros desarrollaran la teoría de los quarks, haciendo la mecánica cuántica del grupo $SU(3)$, lo que posteriormente se llamó Cromodinámica Cuántica[22], logrando así constituir un principio de explicación de la interacción fuerte.

Se han hecho esquemas para el grupo $SU(2) \times U(1)$, que identifica las interacciones electromagnéticas y débiles[23]; para el grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, en el denominado *modelo estándar*, que es virtualmente satisfactorio para explicar las interacciones fundamentales de la naturaleza, salvo una fuerza esquiva: la gravedad, cuya unificación con las demás fuerzas se le escurrió a Einstein de las manos durante más de treinta años (teoría del campo unificado); que actualmente dentro del espíritu de las teorías gauge, parece más cerca que

[21] VARADARAJAN, B., Geometry of Quantum Theory, Springer, (1985).
BAILIN, D. Y LOVE, A., Introduction to Gauge Field Theory, Hilger, (1980).
[22] INDURAIN, F., Quantum Cromodinamics, Springer, (1986).
[23] RYDER, L. Quantum Field Theory, Cambrige, (1984).

nunca con nombres como supersimetría, supergravedad[24], que como su nombre lo indica son super-teorías.

De estas teorías, sacamos en claro que las interacciones fundamentales **son 4:** electromagnética, débil, fuerte y gravitacional, que constituyen otra tetractys de la naturaleza, que puede verse como la versión moderna de la vieja tetractys: agua, tierra, aire y fuego. La primera hace que las partículas que tengan carga eléctrica, interactúen de dos maneras posibles, se atraen o se repelen; la segunda es la responsable de las desintegraciones beta de los átomos radioactivos que expulsa un *electrón del núcleo de un átomo*, aumentando en uno el número de protones; la tercera es el pegante que mantiene unidos los núcleos atómicos, la última es la responsable de la estabilidad del cosmos a gran escala.

También se desprende de ellas que las llamadas partículas elementales que constituyen los átomos, no son elementales, pues la mayoría de ellas están compuestas por *quarks*; ni son 3, a saber: protones, neutrones y electrones, sino que son muy numerosas, mesones, kaones, piones, hiperones, neutrinos, etc.

Los quarks, como ladrillos fundamentales de la materia, iniciaron en 3: *up, down y Charm*; pero fueron apareciendo miembros de la familia, hasta llegar a **seis**, en la actualidad.

Si queremos insistir en la mirada pitagórica, **cuatro y seis!.**

4. La teoría de la relatividad

Otra fuente para darle razón a Pitágoras, viene esta vez de el experimento de Michelson Morley en 1887, diseñado para determinar la existencia de un marco especial de referencia, el éter, y en este, el movimiento de la tierra. Tal experimento dio como resultado que dicho marco no existe, que la velocidad de la luz es la misma cuando se mide a lo largo de dos ejes perpendiculares en un marco de referencia y que las ecuaciones de Maxwell deben permanecer invariantes a observadores que viajen unos respecto a otros con velocidad uniforme.

Albert Einstein en 1905 propuso su teoría especial de relatividad[25], donde explica el experimento y obtiene otras consecuencias, como que el espacio y el tiempo no son absolutos, ni diferentes, sino que están relacionados mutuamente por transformaciones de Lorentz:

$$
\begin{aligned}
x` &= \gamma(x - vt) \\
y` &= y \\
z` &= z \\
t` &= \gamma(t - vx)
\end{aligned}
$$

[24]De WITT, B. Supermanifolds, Cambridge, (1984).
[25]BERGMAN, P. Introduction to the Theory of Relativity, Dover, (1976).

donde $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ y hemos escogido la velocidad de la luz como unidad.
En 1908, Hermann Minkowski formuló la teoría especial de la relatividad en un espacio-tiempo M continuo de cuatro dimensiones (x, y, z, t) donde la velocidad v, puede interpretarse como la tangente hiperbólica de un número real

$$v = \tanh \phi$$

con lo que se obtiene que

$$\gamma = \cosh \phi$$

y las transformaciones adquieren la forma:

$$\begin{aligned} x` &= x \cosh \phi + t \sinh \phi \\ y` &= y \\ z` &= z \\ t` &= t \cosh \phi + x \sinh \phi \end{aligned}$$

con un extraordinario parecido a las rotaciones del espacio habitual, pero cambiando las funciones trigonométricas circulares por hiperbólicas.
Las leyes de movimiento son, sin embargo, iguales en forma a las de Newton pero en un espacio cuadritrimensional,

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

τ es un parámetro invariante, P^μ es el cuadrivector momentum-energía, cuya primera componente es de masa y las otras tres de momentum lineal usual; F^μ es otro cuadrivector cuya primera componente es de energía y las otras tres de fuerza, las tres últimas son ligeras modificaciones (con la masa dependiendo de la velocidad) de la ley de Newton y la primera expresa algo novedoso “la masa y la energía son la misma cosa”, popularizada de la forma:

$$E = mc^2$$

La extensión natural para el operador de las derivadas parciales es $\partial\mu = (\partial t, -\nabla)$ (usamos índices griegos para el espacio de Minkowski e índices latinos en otras circunstancias) y con él, la de divergencia en un cuadrivector es $\partial\mu A^\mu$ (aquí aplicamos también un convenio debido a Einstein, que consiste en sumar sobre índices repetidos que aparezcan al mismo lado de una ecuación con productos). El rotacional debemos caracterizarlo con dos índices:

$$F_{\sigma\mu} = \partial_\mu A_\sigma - \partial_\sigma A_\mu$$

Obsérvese que la posición de los índices en la divergencia y en el rotacional son diferentes; En la primera se está asumiendo el convenio de suma de Einstein, en el segundo se están formando en total un conjunto de 16 cantidades que podrían organizarse en una matriz 4x4 llamada tensor de segundo orden (por la manera de transformarse en este espacio).
Con este lenguaje las cuatro ecuaciones de Maxwell, en forma relativista se reducen a:

$$\partial_\sigma F^{\mu\sigma} = J^\mu$$
$$\partial^\mu F^{\Omega\theta} + \partial^\theta F^{\mu\Omega} + \partial^\Omega F^{\theta\mu} = 0$$

Donde $F^{\mu\sigma}$ es el tensor de campo electromagnético, formado por **seis componentes**: tres componentes de campo eléctrico y tres de campo magnético, expresados en términos de un vector A_μ de **cuatro componentes**, tres del vector potencial magnético A y el potencial eléctrico ϕ. Las componentes de J^μ son la densidad de carga ρ y de corriente J mencionada antes.
El cuatro es importante para Pitágoras por la misma razón que lo es para Einstein, Minkowski, Stefan y Boltzmann:

$$4 = 3 + 1$$

Curiosamente, el tetraedro lo asociaron los pitagóricos con el fuego y la parte espectacular del fuego es el calor radiante y la luz, y esto es: campo electromagnético.

4.1. La dualidad onda corpúsculo

En 1923 Louis de De Broglie aplicó la invarianza relativista de cuadrivectores a la ecuación de Planck

$$E = hv$$

La energía E y el tiempo asociado con la frecuencia v son componentes temporales singulares de dos cuadrivectores, los restantes tres componentes de momento y de espacio, respectivamente, deben estar relacionados de manera similar.
Como consecuencia, una partícula de momento

$$mv$$

tendría una longitud de onda (de De Broglie)λ dada por

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Si aplicamos esto a la fórmula de Bohr

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

obtenemos

$$n\lambda = 2\pi r$$

De esta manera, las ondas de materia, tienen exactamente n periodos alrededor de la circunferencia de la orbita y la interpretación de la estabilidad del electrón es que este constituye un estado estacionario.
En este caso, Pitágoras **si tenía razón**.

Referencias

[1] BAILIN, D. Y LOVE, A., *Introduction to Gauge Field Theory*, Hilger, (1980).

[2] BERGMAN, P. *Introduction to the Theory of Relativity*, Dover, (1976).

[3] CHURCHIL., *Complex variables and applications*, McGraw Hill, 1960.

[4] De WITT, B. *Supermanifolds*, Cambridge, (1984).

[5] DUBROVIN, B; FOMENKO, A; NOVIKOV, S; *Modern Geometry*, vol 1, (1984).

[6] EISBERG, R., *Física Moderna*, Alhambra, (1973).

[7] GOLDSTEIN, H., *Mecánica Clásica*, Aguilar, (1963).

[8] GREEN, M. ET AL. *Superstring Theory*, Cambridge (1986).

[9] HEIL, M. Y KITZKA, F., *Grundkurs Theoretische Mechanik*, Teubner, (1984).

[10] JACKSON, J., *Electrodinámica Clásica*, Alambra, (1966).

[11] JAFFE, A. GLIM, J., *Quantum Physics*, Springer, (1987).

[12] JAMMER, M; *Conceptual developments of Quantum Mechanics*, Wiley, (1974).

[13] KAHN, D., *Introduction to Global Analysis*, Academic Press, (1980).

[14] KOBAYASHI, S. *Foundations of Differential Geometry*, vol 1, Wiley, (1963).

[15] LICHNEROWICZ, A; *Elementos de Cálculo tensorial*, Aguilar, (1972).

[16] MALTSEV, A., *Fundamentos De Algebra Lineal*, Mir, 1976.

[17] NASH, C. Y SEHN, S., *Topology and Geometry for physicists*, Adcademic Press (1983)

[18] NEKRASOV, B, V., *Química General*, Mir, 1988.

[19] PENROSE, R., *Twistor Theory its aims and achievements en Quantum Theory and Beyond*, Cambridge Press, 1972, cap VI.

[20] RASTALL, P., *Quaternions in relativity*, Modern Phys. 1964, 820.

[21] RYDER, L. *Quantum Field Theory*, Cambrige, (1984).

[22] SAKURAI, J., *Advanced Quantum Mechanics*, Addison, (1978).

[23] SALETAN, E. Y CROMER, A., *Theoretical Mechanics*, Wiley (1971).

[24] SHANKS, D., *Solved and unsolved problems in Number theory*, Chelsea, 1985.

[25] SPIVAK, J., *Cálculo en variedades*, Reverté, 1970.

[26] THORPE, J. A., *Elementary Topics in Diferential Geometry*, Springer (1985).

[27] UTIYAMA, R., *Physical Review 101*, 1597, (1956).

[28] VARADARAJAN, V; *Geometry of Quantum Theory*, Springer, (1985).

[29] YNDURAIN, F; *Quantum Chromodynamics*, (1983).

[30] YNDURAIN, F., *Quantum Cromodynamics*, Springer, (1986).

[31] ZABEYKO, P. *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Springer, (1984).